Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de mathématiques

Année universitaire 2014-2015
SMPC Examen Algebre I
Durée 2 heures

NOM et Prénom : ....
Num de table : ....
Num. Appogée..

Mettre une croix ☒ pour la réponse vraie.

Exercice 1 Soit $z, z' \in IC$ tels que $arg(z) = \frac{\pi}{3}$ et $z' = -1$, alors :

- ☐ $arg(zz') = \frac{\pi}{3}$
- ☐ $arg(zz') = \frac{4\pi}{3}$
- ☐ $arg(zz') = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $arg(zz') = \frac{\pi}{6}$
- ☐ $arg(zz') = \frac{5\pi}{6}$

Exercice 2 Soit $n \in IN$, $z = (1 + i\sqrt{3})^n$ est un nombre réel si et seulement si:

- ☐ n est paire
- ☐ n est impaire
- ☐ n est un multiple de 3
- ☐ $n > 1$
- ☐ n est un multiple de 5

Exercice 3 Soit $A = 1 - X + 2X^2$ et $B = 1 - 3X + X^2$. Le quotient de la division suivant les puissaces croissantes de A par B à l'ordre 3 est :

- ☐ $2 + 2X + 7X^2 + 19X^3 + 50X^4$
- ☐ $1 + 2X + 7X^2$
- ☐ $1 + 2X + X^2 + X^3$
- ☐ $1 + 2X + 7X^2 + 19X^3 + 50X^4$
- ☐ $1 + 2X + 7X^2 + 19X^3$

Exercice 4 Le quotient de la division euclidienne de $X^6 - 1$ par $X^2 + X + 1$ est :

- ☐ $X^3 + 1$
- ☐ $X^4 + X^2 + 1$
- ☐ $X^4 - X^3 + X - 1$
- ☐ $X^4 - 1$
- ☐ $X^2 - 1$

Exercice 5 Soit la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X^4-1}{(X-1)^2(X^2+1)^3}$. La forme irréductible de $F(X)$ est :

- ☐ $\frac{X^4-1}{(X-1)^2(X^2+1)^3}$
- ☐ $\frac{X+1}{X^2+1}$
- ☐ $\frac{(X^2+1)(X^2-1)}{(X-1)(X^2+1)^3}$
- ☐ $\frac{X+1}{(X-1)(X^2+1)^2}$
- ☐ $\frac{X^2+1}{X-1}$

Elabbassi

Exercice 6 Soit la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X^4-1}{(X+1)(X-1)^2(X^2+1)^3}$. L'ensemble des pôles complexes de $F(X)$ est :

- ☐ $\{1, -1, -i, i\}$
- ☐ $\{1, i\}$
- ☐ $\{1, i, -i\}$
- ☐ $\{1, -i\}$
- ☐ $\{1\}$

Exercice 7 Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On a :

- ☐ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$
- ☐ $\det(2A) = 2\det(A)$
- ☐ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- ☐ $\det(AB+I) = \det(A) + \det(B)$
- ☐ $\det(-A) = -\det(A)$

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 17 & 18 & 19 \\ 117 & 118 & 119 \end{pmatrix}$, $\det(A)$ est :

- ☐ $7 \times (18 \times 119 - 118 \times 19) + 17(8 \times 119 - 118 \times 9) + 117 \times (8 \times 19 - 118 \times 9)$
- ☐ $7 \times 118 \times 9 - 117 \times 18 \times 9$
- ☐ $17 \times 18 \times 19 - 7 \times 8 \times 9$
- ☐ $7 \times (18 \times 119 - 19 \times 118)$
- ☐ 0

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le rang de A est :

- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 3

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, l'inverse de A est :

- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 & -3a & 3-2a \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ -3a & a^2 & 0 \\ 3-2a & -a & a^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -3\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{3-2a}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -3\frac{1}{a^2} & \frac{3-2a}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

Elabbassi

Exercice 11 Soit $P(X) \in R[X]$ tel que :
le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ est 2,
le reste de la division euclidienne de P par $X+2$ est 3,
le reste de la division euclidienne de P par $X-3$ est 5,

a) Calculer $P(1)$

b) Calculer $P(-2)$

c) Calculer $P(3)$

d) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X+2)(X-3)$

Elabbassi

Exercice 12 On considère le pôlynome à coefficients complexes
$T(X) = X^3 + (1 - i\sqrt{2})X^2 + (74 - i\sqrt{2})X - (74\sqrt{2})i$.

1) Chercher y réel tel que iy soit une racine de $T(X)$

2) Déterminer a et b réels tels que $T(X) = (X - i\sqrt{2})(X^2 + aX + b)$

3) Trouver toutes les racine de $T(X)$ dans $\mathbf{C}$

4) Décomposer $T(X)$ en facteurs irrductibles dans $\mathbf{C}[X]$

Elabbassi

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de mathématiques

Année universitaire 2014-2015
SMPC Examen Algebre I
Durée 2 heures

NOM et Prénom : ....
Num de table : ....
Num. Appogée..

<u>**Exercice**</u> 13 Soit la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X^3+2X^2-X-2}{(X+2)(X-1)^4(X^2+1)}$

1) On pose $S(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$. Calculer $S(1)$ et $S(-2)$. En déduire la décomposition de $S(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$..
....
....
....
....
....
....
....

2) Déterminer les pôles de $F(X)$ et leurs ordres..
....
....
....
....
....
....

3) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $Y+2$ par $2+2Y+Y^2$ à l'ordre 2..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4) En déduire la décomposition de $F(X)$ en éléments simples dans $R[X]$
....
....
....
....
....
....

Elabbassi